4. Exercices d'entraînement et de préparation au DS

Exercice 3.A Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = n^3$.

1. A partir de quel rang a-t-on $v_n > 1000$?
2. A l'aide de la définition, montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$

Exercice 3.B On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = u_n + n + 1$, pour tout entier naturel n. Compléter l'algorithme ci-dessous pour que la variable n contienne, après son exécution, le plus petit entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

```
u ← ...
n ← ...
tant que ....... faire
    u ← ...
    n ← ...
```

On pourra programmer cet algorithme sous la forme d'une fonction en Python.

Exercice 3.C Déterminer les limites des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 5n + 3$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right)\left(-n^3 + 1\right)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $i_n = \frac{2}{u_n}$

Exercice 3.D Déterminer les limites des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n - n^2$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{n^3+2n}{5n^3+1}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{1}{n^2}\left(1 + 2n^3\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \frac{\frac{2}{n\sqrt{n}}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}$

Exercice 3.E Étudier la convergence des suites définies ci-dessous :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{4+(-1)^n}{n^2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = n^3 + (-1)^n$

Exercice 3.F

1. Étudier la convergence des suites définies par :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{5^n}$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -4\left(\sqrt{3}\right)^n$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = (-2)^n$
2. Déterminer la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 5^n$

Exercice 3.G

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{4n+1}{1-5n}$.
   Démontrer que (u_n) est minorée par $-\frac{5}{4}$.
2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$ et $u_0 = 1$.
   Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4$.

Exercice 3.H On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$ et $u_0 = 1$.

1. (a) Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 7.
   (b) En déduire que le suite (u_n) est croissante.
2. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3.I On considère la suite (u_n) définie par $u_2 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_n$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$
   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 3.J Au casino, une machine à sous est réglée de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est $\frac{1}{4}$
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est $\frac{1}{2}$

Pour tout entier naturel non nul n, on note G_n l'événement ≪ la n-ième partie est gagnée ≫, et on note p_n la probabilité de cet événement.
La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$, donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$ et que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$
2. On pourra programmer une fonction en Python retournant la liste des 10 premiers termes de la suite (p_n).
   On pourra aussi programmer cette suite sur sa calculatrice.
   Quelle conjecture peut-on émettre ?
3. On définit pour tout entier naturel n non nul la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, en précisant sa raison.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
   (c) La suite (p_n) est-elle convergente ? Interpréter ce résultat.